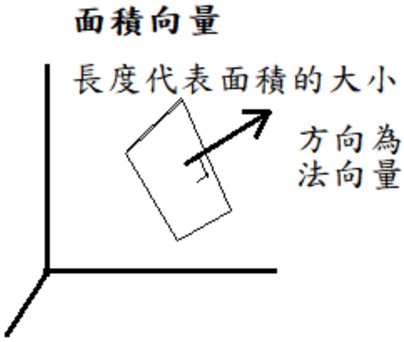
面積向量，是向量嗎?

史 英　2021.7.30 完稿

一、 何謂面積向量?

面積，本來是純量，和長度，體積，重量等等一樣；但三度空間裡的一片薄平玻璃，除了有面積之外，還有一個傾斜的「方向」，可以用它的法向量來代表。

我們於是遇到了一個「又有大小，又有方向」的量，不妨用一個箭頭表示，這時候，理所當然地，稱它為「面積向量」。



二、 稱它為向量，真的理所當然?

「有方向，有大小」就稱為向量，這麼說也沒有什麼不可以，但不一定有意義。

看一個例子：把身高和體重，分別當做向上向下箭頭的長度，這樣，一個人的基本生理資料，不就是向量了嗎？這實在有點好笑，為什麼不直接寫數字和文字就好？有人說，這是因為只有兩個方向，那麼——

再看一個例子：地面受到日照的強度，隨日光的方向而變化，「有大小，有方向」，把強度當做指向太陽的箭頭的長度，日照強度不就是向量了嗎?

這聽起來很炫吧？但把早上九點和十點的兩個日照強度向量加起來，大概是稍偏向十點方向的一個向量，但它的長度比前二者都大，所以，不可能是九點半之後任一時刻的日照強度；那麼，它代表什麼呢?

所謂的「日照強度向量」之和，既然不再是某個日照強度向量，稱它為向量就沒什麼意義，只是幼稚的東施效颦而已。

三、 「某量是向量」到底是什麼意思?

向量，並不是單純的「有長度的箭頭」，或「有大小，有方向」的量；做為向量，重要的是它的「運作」：合成，分解，投影，內積…就好像看一個人，不能只看他的外表，還要看他和別人的互動!

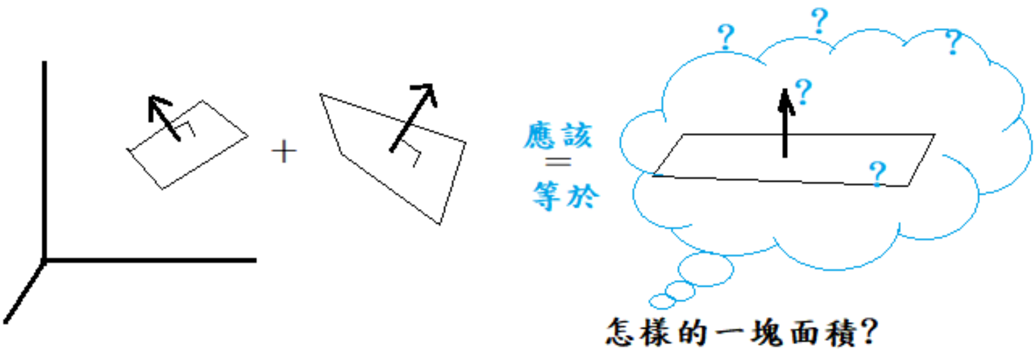
一個向量，要有意義的話，應該代表某個「現實世界」的量，無論是物理的，或幾何的；然而，如果這個向量的「運作」，無法「反應」它所代表的「現實世界的量」，我們就應該拒絕承認它是一個向量，而不能拘泥於它既有大小，又有方向!

例如，一個物體的轉動，是有大小（轉動角度）和方向（轉動軸）的，但接連兩次的轉動，卻不能用所謂的轉動向量之和來代表，所以物理學家就直接說：轉動不是一個向量! (詳見「角速度是向量嗎？」)

四、 我們的任務

我們任務，本來可以是：解釋面積向量相加，或與其他向量內積，或投影到其他方向，的意義，即代表什麼具體的幾何量；但我們可以選擇更具「野心」的任務。

我們可以「先放棄」既有的面積向量概念，直接去思考在三度空間中: (傾斜方向不同的) 面積「應該」如何相加，如何投影 (因為面積還不是向量，所以不用研究其內積)；然後，從以上的思考中，「發現」「一、」中所描述的面積向量。

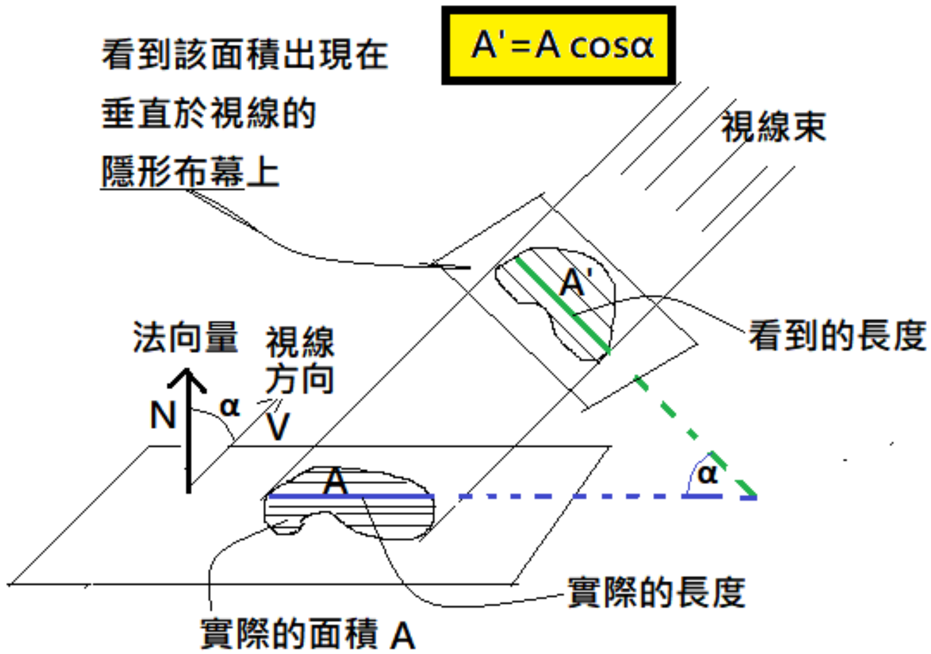


無疑地，這才是「自己的數學」要走的路。

五、 我們應該怎麼「看」那些「傾斜方向不同」的面積?

在 3D 的某處，看一塊平面區域，我們未必能**看出**它**真正**的面積，當視線和它有一個角度的時候。假設我們距離它很遠，而且不具「全知觀點」，因而也無從知道視線和該面積的夾角。我們無從察覺是或不是**正對著它**看，**只好**認為它出現在我們視線前方、且**垂直於視線**的隱形布幕上。設想遙看遠處海上的一片帆，應該就是這個**情境**。

1. 我們看到的，是真正的面積的 cos α 倍，如圖: (因為距離遠，可以假設視線是一束平行線)



因為，沿著圖示方向的長度看起來都縮小的 cos α 倍，而平面上垂直方向的長度則不變; 因為面積是由切成很小的方塊累加而成，每一小方塊都縮小那麼多倍，實際面積 A 就跟著縮小那麼多倍而被看成 A'了。

(α 為兩個面所夾銳角; 也可以說，選擇 N，使其與 V 夾銳角: 對於給定的實際面積區域，有兩個方向的 N 可選)

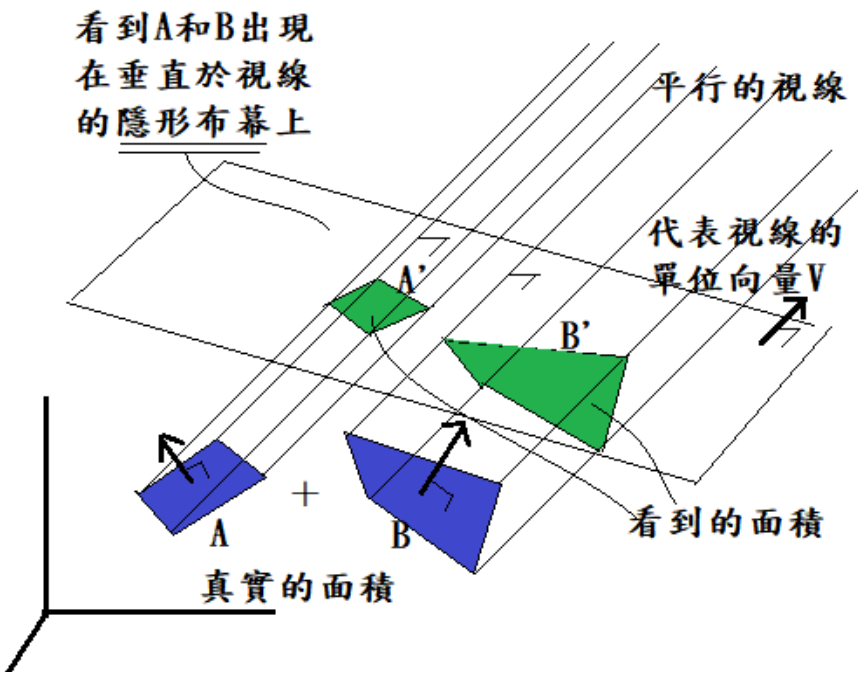
2. 我們如何看到真正的面積?

   因為無法看出α，我們只好移動自己的位置，改變視線的方向，直到從「正面」看它的時候；也就是沿著法向量的方向看而α=0 時。換言之，當我們透過**改變視線方向**而看到面積**<u>最大</u>**時，A’=A，就是真正的面積了。

六、 我們如何看到兩塊面積的「和」?

1. 現在有兩塊如上圖的面積 A 和 B，有各自的法向量，我們任選一個位置看去 (還是假設視線平行)，就有和兩個法向量的夾角α和β，所以，我們看到: A’和 B’的面積和=a cosα + b cosβ，其中 a, b 為 A 和 B 的大小 (純量)；那麼，然後呢?
   (同樣地，選擇兩個法向量，都和視線方向 V 夾銳角)

2. 因為仍然無由得知α和β，且無由分辨它們是否有不同的傾斜；**只好**認為 A’和 B’出現在垂直於視線的**同一個**隱形布幕上。換言之，我們同時看到兩塊**共面**的面積 A’和 B’，因而，對我們而言，這和**一塊面積**沒什麼差別 (只是分為兩區)；也無法分辨和原本的 A 和 B 的差別。



3. 但舊的「看一塊面積」的經驗告訴我們，最好移動一下自己的位置，改變一下視線的方向——以便看到**最大的面積**；這時候，

所謂的面積，已經是 A’和 B’ 合起來的面積了。所以，要求：看到的面積和=$a\cos\alpha + b\cos\beta$的最大值。但要注意，α和β並非獨立變數，它們都是由視線方向所決定的；但這仍然是困難的任務。

4. 這時候，我們的「數學工具」應該要出場：設視線方向為單位向量 V，｜V｜= 1，如圖；那麼，如何用 V 表出 $a\cos\alpha$ 和 $b\cos\beta$？其實，只要想起
   N‧V = cos (N 和 V 的夾角)！ 當然，N 是單位法向量，｜N｜=1。

七、 我們發現了「面積向量」

1. 記得我們要用 V 表出：A’和 B’的面積和 = $a\cos\alpha$ 和 $b\cos\beta$，很自然地， $a\cos\alpha = a(N \cdot V) = aN \cdot V$，其中 a 是 A 面積的大小(純量)，N 是 A 面積的單位法向量。

2. 於是我們便「發現」了「面積向量」aN——以「單位法向量為方向，以面積 a 為大小」的向量！這個面積向量，以 $aN=\vec{A}$ 表示，不是出於別人的定義，而是出於**解決問題的需要**！

八、 我們發現了「面積向量和」的意義：

兩個面積向量相加的結果，仍然是代表**某面積**的面積向量；
這**某面積**，是遠觀者將前二者合起來看，能看到的**真正** (最大)面積。(**真正**是他主觀的認定：只要是最大，就是真正了)

1. A’和 B’面積和= 看到的面積和 = $a\cos\alpha + b\cos\beta = (aN_1)\cdot V + (bN_2)\cdot V = [\vec{A} + \vec{B}]\cdot V$；注意，其中$\vec{A}$和$\vec{B}$是給定的，V 是可變的。因為是一個內積，而 V 又是一個單位向量，它的最大值，當然發生在當 V 和$[\vec{A} + \vec{B}]$方向一致時，即：$V=[\vec{A} + \vec{B}] / |\vec{A} + \vec{B}|$ (除以長度，使 V 為單位向量)，
   此時，看到的「面積和」的最大值也就是$|\vec{A} + \vec{B}|$。

2. 因為是「A’和 B’合起來」的面積最大值，我們便認定它是我們看「A 和 B 合起來」的**真正**的面積。那麼，我們看到的，到底是什麼呢？
   可以畫出：以 $V=[\vec{A} + \vec{B}] / |\vec{A}+\vec{B}|$ 為法向量，大小為$|\vec{A}+ \vec{B}|$

的一塊（平面）面積；這塊面積的「面積向量」，不就恰恰好是 $\vec{A}+\vec{B}$ ？

3. $\vec{A}+\vec{B}$ 做為兩個「面積向量」之和，不但（當然）是一個向量，而且也代表一個具體的「有方向（傾斜），有大小（純量）」的 3D 中的一個平面區ㄨㄟ域面積。所以，我們發現了：**面積向量之和，仍是一個面積向量**。

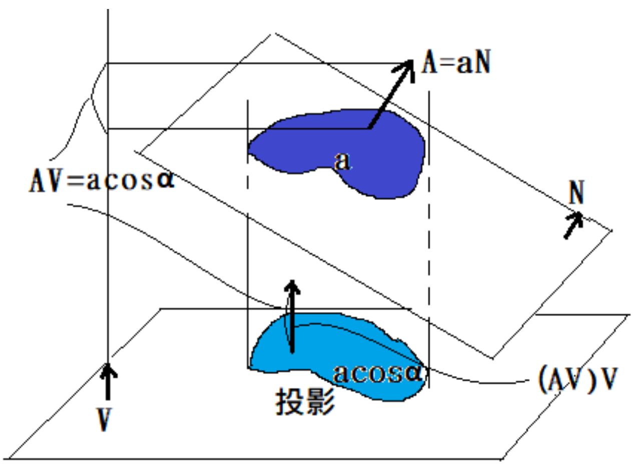
4. 這個加出來的「面積向量」所代表的，恰好是我們從某個視角同時看 A 和 B，所看到的**真正**的面積! (因為是能看到的最大值) 這兒的要點，再重複一次：當缺乏「全知觀點」的時候，看到**真正面積**的方法，就只有**看到最大值**!

九、 **「面積向量」的內積、投影、和、以及分量**——走過以上「**主觀**看到」的發現，反過來直接從定義出發做「**客觀**（全知）解釋」

之前從「看到」發現面積向量時，是配合視線選法向量與其夾銳角；現在從面積向量「定義」出發，則必須先選定法向量。
(以下，所有向量都用大寫字母表示，不再上加箭頭，並省略內積符號，所以 A 又是面積區域，又是 A 區域的面積向量)

1. 內積、向量投影、面積投影

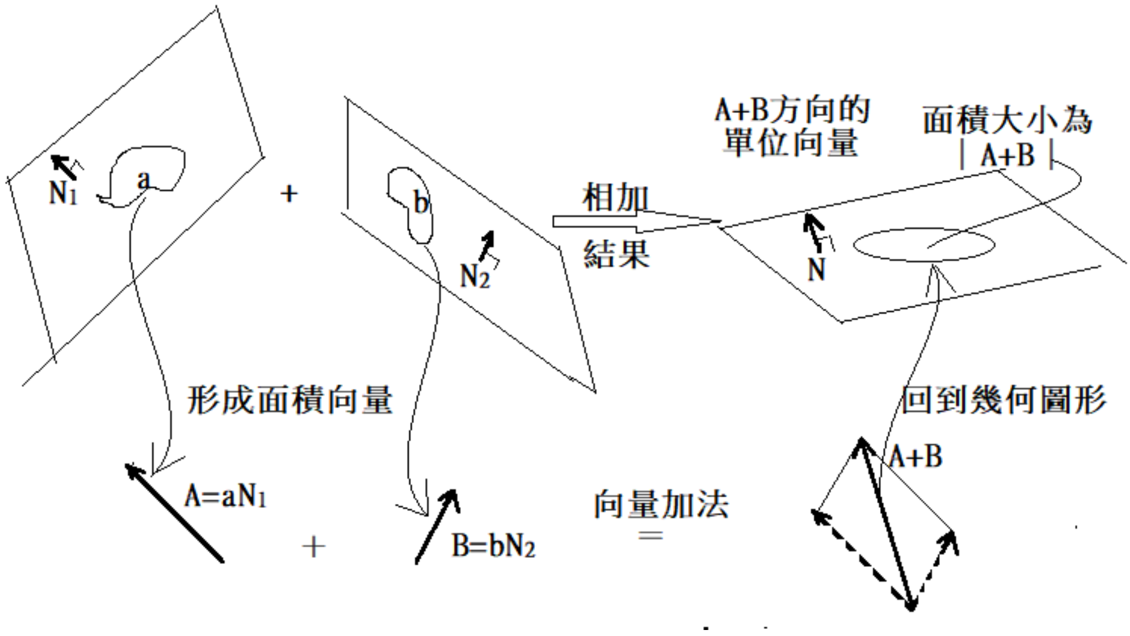
設有面積區域 A，已選定其法向量 N，於是有面積向量 A=aN (現在，這是定義)，將它投影到某單位向量 V 上（取它在 V 方向的分量)，其投影長度即內積 AV = a cos (A,V 夾角) = 將 A 區域投影在一個垂直於 V 的面上的面積；而 A 在 V 上的分量 (AV)V 恰好為此投影面積之面積向量。



如果 N 和 V 夾鈍角，則投影面積即為負 (之前我們刻意選 N 使其與視線 V 夾銳角，則無此情況)

2. 面積向量之和

給定面積區域 A 和 B，形成面積向量 A 和 B，向量和 A+B 也代表一個面積區域:



3. 「面積向量和」的意義:

把上圖中三個面積區域都投影到某個以 V 為法向量的平面上，因為 (A+B)V=AV+BV，故知, A+B 的投影面積，
恰好等於 A 和 B 的投影面積和，而這是對於任何 V (任何投影平面) 都成立的，這可以說是面積向量 A+B 的意義。

也可以這樣說: A 既然不能直接和 B 相加，我們便希望把它們投影在某平面上來加；自然地，投影在不同平面上，加的結果也不會相同。不料，我們竟然可以找到一個面積區域，投影在任何平面上，都等於 A 和 B 投影之和！找到的這個面積區域，恰好就是面積向量 A+B 所代表者。

4. 面積向量的分量
面積向量，如任何向量，可以用它在三個座標軸的分量表示。
設面積向量 $A = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$
則 $a_3 = A\vec{k}$ = (A 在 $\vec{k}$ 上的投影長) = (把 A 面積區域投影在 X-Y

平面上的面積) ; a_2, a_1 亦同——將「九、1」中的 V 改為$\vec{k}$即得。所以，一個面積向量的三個分量，分別為該面積區域投影在三座標面上的面積;

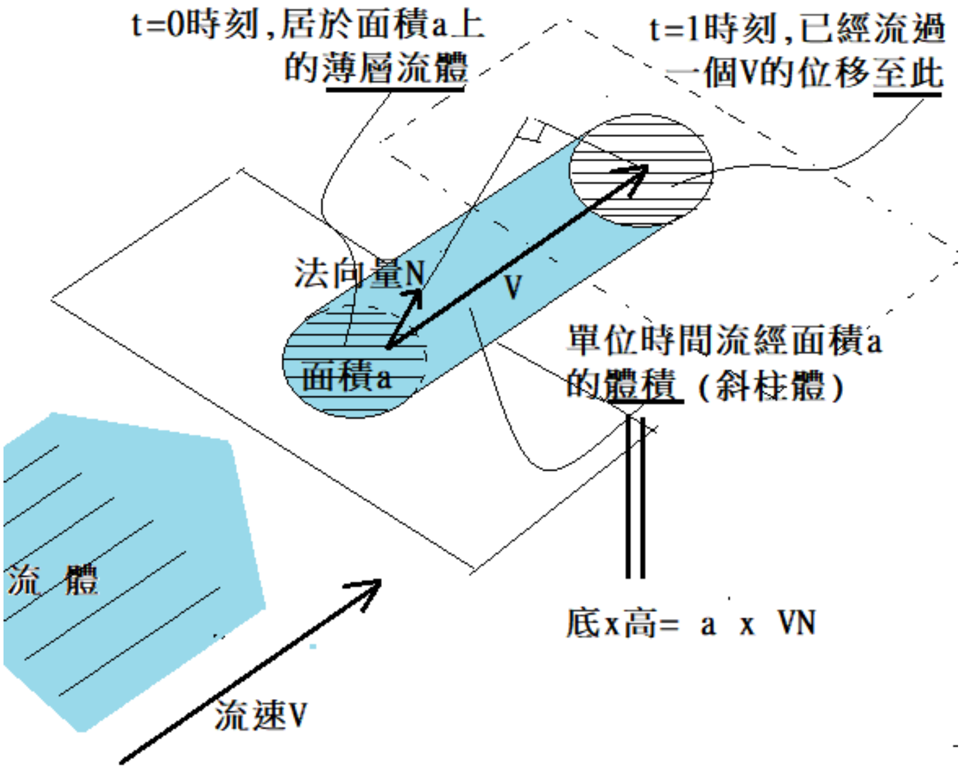
$$|A| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} \ ,$$

故 3D 中一塊面積 $= \sqrt{\text{它在三座標面上投影之平方和}}$——也可以從「$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 三者平方和」為 1 得之。

十、 從一個物理問題，再次「發現」面積向量，並解決一個應用問題

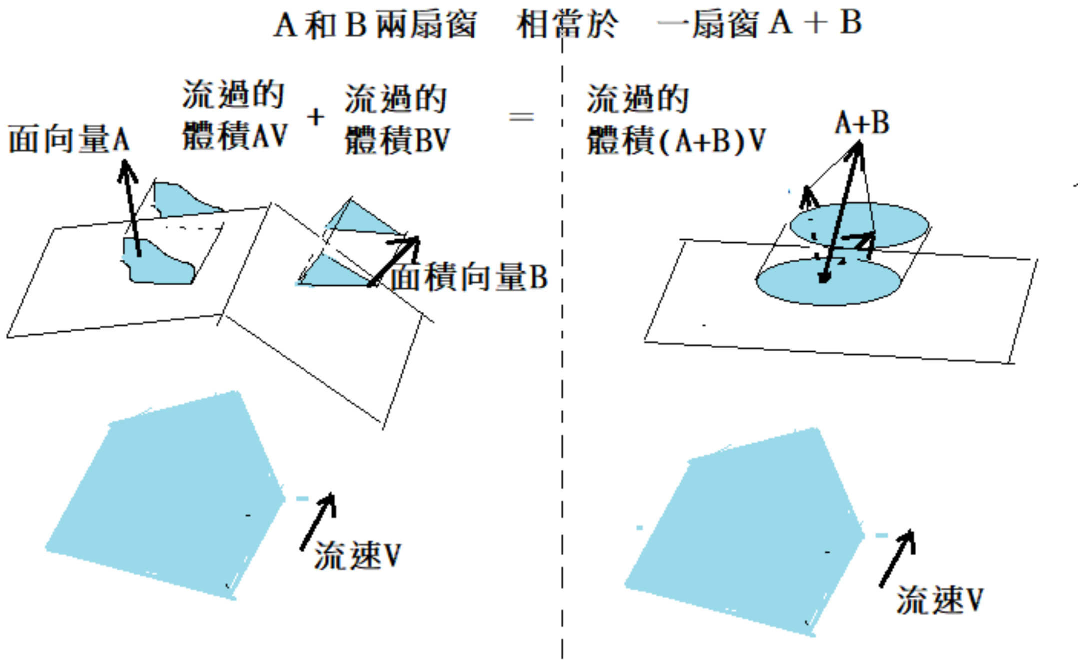
假設有流速為常向量 V 之流體，我們想知道它流經某面積、或某些面積、的體積，在單位時間內。

1. 可以設想平面牆上，有一個 A 區域 (大小為面積 a) 的窗:



V 在 N 上的投影長= NV =斜柱體的高;
故流出的體積 = a NV = (aN)V = AV 。
再一次，我們將 a 和 N 組合成**面積向量;**
由於解決問題的自然需求，而非事先的定義。

2. 若兩面牆上各有窗 A 和 B，則流經此二面積的體積 = AV+BV= (A+B)V；也就是等同於流經一扇面積為 A+B 的窗，在單位時間內:



這樣，我們便再次發現面積向量之和的意義。

3. 在兩面牆上各有一窗的情況下，如何調整流速的方向（但保持其快慢），以便得到最大的流出量?

在｜V｜不變的條件下，(A+B)V 會達到最大值｜A+B｜｜V｜，當 V 與 A+B 同向時。
這樣，我們利用面積向量之和，解決了一個實際的應用問題。

十一、 我們發現了外積

之前的面積區域，形狀是不重要的，我們只在乎它的大小和傾斜的方向；現在，我們可以把焦點集中在特殊形狀，即平行四邊形上。

這樣做，不僅因為它是基本形狀，涵蓋了長方形和三角形，更因為，它可以用兩個向量**張**出來。

令 VxW 代表向量 V 和 W 所**張**的**平行四邊形**的**面積向量**（從兩

個可能的法向量中任選其一即可), 稱為 V 和 W 的**外積**。

1. 分配律: 可以証明外積運算有分配律。

2. 反交換律:

   因為同方向的向量, 所張的面積當然為 0; 再加上分配律, 可以得到以下結果:

   (V+W) x (V+W) = 0 = VxV + VxW + WxV + WxW = 0 + VxW + WxV + 0 = VxW + WxV
   故 VxW = - WxV; 這表示,「反交換律」一事, 是一個必然, 並非刻意的人為設計。

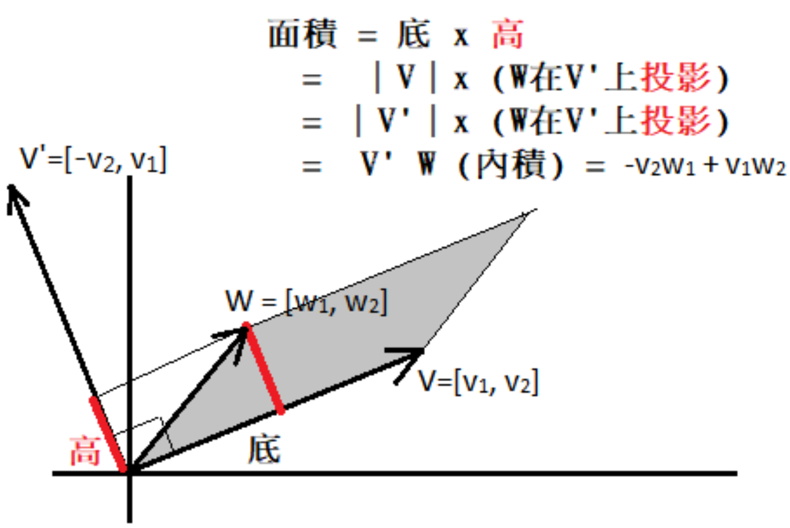
   所以, 原先「任選法向量」的質樸想法, 將會造成矛盾; 因而我們**被迫**必須規定一個**一致的選法**:
   VxW 的法向量 N, 必須使 V, W, N 滿足右手定則 (改成左手定則亦無不可)。

3. 2D 外積

   若在 X-Y 平面上, $V=[v_1, v_2]$, $W = [w_1, w_2]$, 透過將 V 逆時針轉 90º, 利用內積, 容易計算它們所張的

   面積為: $-v_2w_1 + v_1w_2 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$ (暫時將行列式看成一種

   簡記), 而 VxW= $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{k}$ 一定成立。



只要 W 在由 V 逆時針轉 180^o 範圍內，也就是 V,W,$\vec{k}$ 符合右手定則，可以保証 V'和 W 夾角為銳角，
即保証 V'W = $-v_2w_1 + v_1w_2 > 0$，則此面積向量 VxW= $(-v_2w_1 + v_1w_2)\ \vec{k}$;
反之，當 W 在 V 順時針轉 180^o 範圍內, $-v_2w_1 + v_1w_2 < 0$, VxW= $(-v_2w_1 + v_1w_2)\ \vec{k}$ 仍成立。

4. 3D 外積的各分量，及表示法

對於 3D 中任意的 V= $[v_1, v_2, v_3]$, W = $[w_1, w_2, w_3]$，其面積向量 VxW 的$\vec{k}$分量，即為它在 X-Y 平面上投影——由「九、4」;
但這個投影，就是把 V 和 W 投影在 X-Y 平面，即 $[v_1, v_2, 0]$ 和 $[w_1, w_2, 0]$ 所張的面積，由前項知，即$-v_2w_1 + v_1w_2$;

故, VxW 的 $\vec{k}$ 分量 = $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\vec{k}$；同理可得其它二分量

故 VxW = $\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ (簡記為三階行列式)

5. 用 V= $[v_1, v_2, v_3]$, W = $[w_1, w_2, w_3]$ 中的六個數，表出平行四邊形面積:

面積 = | VxW | = $\sqrt{\text{三個分量的平方和}}$

$= \sqrt{\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2}$

十二、 回到原初: 向量，為什麼那樣相加?

在結束本篇之前，我們來問一個最根本的問題: 向量加法是從哪裡來的? 它也有一個自己的來歷嗎?

這樣問，是因為本篇「面積向量，是向量嗎? 」的問題，有一個基本概念: 不是「有大小，有方向」的就是向量，是要能參與到

「向量運作」之中，做為向量，才有其意義；而向量運作，最基本的就是向量的加法。

現在我們追問向量加法的來歷，等於是在問：當向量參與到向量的運作（例如相加）的時候，它到底在做什麼、有什麼意義？這等於是在問：「向量，是一個向量嗎？」

所以，我們要問：兩個**有向線段**，當不共線的時候，它們、包括其長度和方向、要怎麼加？

兩個線段經過平移，總是共面的；在它們所共的面上，用平行視線看去，會看到怎樣的有向線段？

調整視線的方向，看到最大的長度，我們就可以相信，那就是它們合起來的結果了：